

**Trabajo Práctico N°7**  
**Análisis de Fourier**

**Ejercicios. Parte 1**

Serie de Fourier

1. Desarrollar en serie trigonométrica de Fourier las siguientes funciones:

- (a)  $f(t) = \begin{cases} |t|, & -\pi < t \leq \pi \\ f(t + 2\pi), & \forall t \end{cases}$
- (b)  $f(t) = \begin{cases} A \sin \omega_0 t, & 0 \leq t \leq \pi/\omega_0 \\ 0, & \pi/\omega_0 < t \leq 2\pi/\omega_0 \\ f(t + 2\pi/\omega_0), & \forall t \end{cases}$
- (c)  $f(t) = \begin{cases} t(\pi - t), & -\pi < t \leq \pi \\ f(t + 2\pi), & \forall t \end{cases}$
- (d)  $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t \leq T \\ f(t + T), & \forall t \end{cases}$  Onda diente de sierra

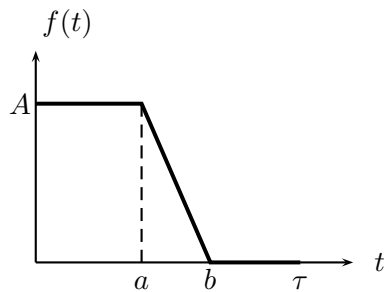
Graficar en cada caso la cuarta suma parcial.

2. La función  $f(x) = \pi - x$  está definida en el intervalo  $0 \leq x \leq \pi$ .

- (a) Construir una función  $\varphi(x)$  que sea la extensión periódica par de  $f(x)$  con período  $2\pi$ . Graficarla para  $-3\pi \leq x \leq 3\pi$ .
- (b) Obtener el desarrollo en serie de Fourier trigonométrico de la extensión par  $\varphi(x)$ .
- (c) Computar las sumas

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

3. Dada la función  $f(t)$  definida en el intervalo  $(0, \tau]$  como se muestra en la figura,



- (a) Representarla mediante una serie trigonométrica con términos cosenoidales en  $(0, \tau)$ .
- (b) Representarla mediante una serie trigonométrica con términos senoidales en  $(0, \tau)$ .

4. La temperatura en una barra metálica de longitud  $L$ , con los extremos a  $0^\circ$  y lateralmente aislada, es una función  $u(x, t)$ , siendo  $x$  la coordenada de un punto de la barra y  $t$  el tiempo. La evolución de la temperatura obedece al proceso de difusión y está gobernada por la *ecuación de Fourier*:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= k^2 u_t(x, t), & t > 0, & \quad 0 < x < L \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) & 0 \leq x \leq L \end{aligned}$$

donde  $k^2$  es una constante que depende del material y  $u_0(x)$  es la distribución inicial de temperatura.

Para resolverla, proponer como solución  $u(x, t) = \phi(x)e^{-\lambda t}$ , siendo  $\lambda$  una constante a determinar y  $\phi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  una función desconocida.

- (a) Demostrar que tanto la constante  $\lambda$  como la función  $\phi$ , satisfacen el problema:

$$\begin{aligned} \phi''(x) + \lambda k^2 \phi(x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq L \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(L) &= 0 \end{aligned}$$

- (b) Demostrar que existen infinitos valores de  $\lambda > 0$  e infinitas soluciones  $\phi$ :

$$\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L}x, \quad \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{k^2 L^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- (c) Justificar que la solución de la ecuación de Fourier con las condiciones de borde dadas es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{\pi^2 n^2}{k^2 L^2} t} \sin \frac{n\pi}{L}x$$

donde  $a_n$  son constantes a determinar.

- (d) Demostrar que los coeficientes  $a_n$  se computan a partir de la condición inicial  $u_0(x)$  como:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin \frac{n\pi}{L}x \, dx$$

Calcular la temperatura para una distribución inicial de temperatura:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq \frac{3L}{8} \\ A, & \frac{3L}{8} < x \leq \frac{5L}{8} \\ 0, & \frac{5L}{8} < x \leq L \end{cases}$$

Graficar la temperatura  $u(x, t_i)$  para distintos valores de  $t_i$ ,  $i = 0, 1, \dots$  en función de  $x$ .

5. Computar la forma compleja de la serie de Fourier de las siguientes funciones periódicas y representar el espectro de frecuencias de cada una de ellas.

$$(a) f(t) = \begin{cases} 0, & -T/2 < t < -d/2 \\ A, & |t| \leq d/2 \\ 0, & d/2 < t < T/2 \\ f(t+T), & \forall t \end{cases}$$

Respuesta:

$$\frac{Ad}{T} + \frac{Ad}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi d}{T}}{\frac{n\pi d}{T}} e^{i \frac{2n\pi}{T}t}$$

- (b) Onda triangular de amplitud 1, valor medio nulo y período  $2\pi$ .

(c)  $f(t) = \sin^4 t$

Respuesta:

$$f(t) = \frac{1}{16}(e^{-4it} - 4e^{-2it} + 6 - 4e^{2it} + e^{4it})$$

$$(d) f(t) = \begin{cases} e^t, & 0 < t \leq 2\pi \\ f(t + 2\pi), & \forall t \end{cases}$$

Respuesta:

$$\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - in} e^{int}$$

$$(e) f(t) = \begin{cases} At, & 0 < t \leq T \\ f(t + T), & \forall t \end{cases} \quad \text{Onda diente de sierra.}$$

Respuesta:

$$\left(\frac{A}{2} + \frac{A}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n} e^{i(n\omega_0 t + \frac{\pi}{2})}\right)T$$

6. Dada una señal modelada por una función  $f(t) = f(t + T)$ , de define *Transformada Finita de Fourier de  $f(t)$*  a la función  $F(n\omega_0)$ :

$$\mathring{\mathfrak{F}}\{f(t)\} = F(n\omega_0) = c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

donde  $\omega_0 = 2\pi/T$ .

Demostrar las siguientes propiedades de la Transformada Finita de Fourier:

**Propiedad (Linealidad).** Sean  $f_1$  y  $f_2$  dos funciones periódicas del mismo período y  $a_1$  y  $a_2$  dos constantes, entonces

$$\mathring{\mathfrak{F}}\{a_1 f_1 + a_2 f_2\} = a_1 \mathring{\mathfrak{F}}\{f_1(t)\} + a_2 \mathring{\mathfrak{F}}\{f_2(t)\}$$

**Propiedad (Transformada de la derivada).** Sea  $f \in C[-T/2, T/2]$  y periódica de período  $T = 2\pi/\omega_0$  con coeficientes complejos de Fourier  $c_n$ , entonces:

$$\mathring{\mathfrak{F}}\{f'(t)\} = in\omega_0 c_n$$

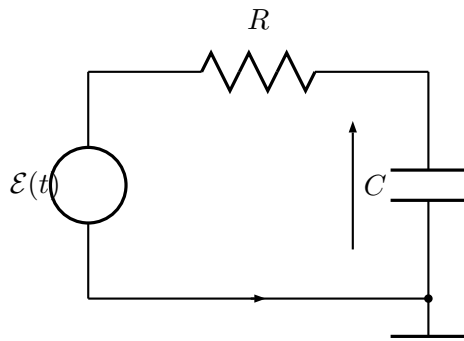
**Propiedad (Transformada de la integral).** Sea  $f$  una función periódica de período  $T = 2\pi/\omega_0$ , entonces:

$$\mathring{\mathfrak{F}}\left\{\int_{-T/2}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{in\omega_0} \mathring{\mathfrak{F}}\{f(t)\}$$

**Propiedad (Corrimiento en el tiempo).** Sea  $f$  una función periódica de período  $T = 2\pi/\omega_0$ , entonces:

$$\mathring{\mathfrak{F}}\{f(t - a)\} = \mathring{\mathfrak{F}}\{f(t)\} e^{-in\omega_0 a}$$

7. El circuito de la figura está formado por un generador  $\mathcal{E}(t)$  en serie con un capacitor de capacidad  $C$  y una resistencia  $R$ . La señal de entrada (input) es la tensión provista por el generador: tren de pulsos rectangulares de duración  $d$  y frecuencia  $\omega_0$ .



La salida (output) del sistema se considera la tensión en el capacitor  $u_C(t)$ , por lo tanto el sistema se modela mediante la ecuación diferencial (relación input-output):

$$RC \frac{du_C}{dt}(t) + u_C(t) = \mathcal{E}(t)$$

Llamando a la constante de tiempo del circuito  $\tau = RC$  y suponiendo que el sistema se encuentra en régimen permanente,

- (a) Demostrar que los coeficientes complejos de Fourier de la salida son  $U_n = E_n / (1 + jn\omega_0\tau)$ , donde  $e_n = \mathfrak{F}\{\mathcal{E}(t)\}$  (donde llamamos  $j$  a la unidad imaginaria).
- (b) Demostrar que la tensión de salida en el capacitor es:

$$u_C(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{E_n}{1 + jn\omega_0\tau} e^{jn\omega_0 t}$$

escribir esta expresión en forma trigonométrica. Graficar las primeras 5 sumas parciales.

- (c) Graficar en módulo y fase la secuencia  $H(n\omega_0) = \frac{1}{1 + jn\omega_0\tau}$ .
- (d) Analizar la salida cuando se dan las siguientes situaciones: i)  $\tau \gg 2\pi/\omega_0$ , ii)  $\tau \ll 2\pi/\omega_0$ . Interpretar estos resultados.

### Transformada e Integral de Fourier

Sea  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , se define *Transformada de Fourier* de  $f(t)$  a:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

De esta forma, es posible *reconstruir* la función  $f(t)$ , a partir de  $F(\omega)$ , al menos en aquellos puntos donde  $f$  es continua, según:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

la cual constituye la representación en *integral de Fourier* de  $f(t)$ .

Una propiedad importante de la transformada de Fourier, es la *identidad de Parseval*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Si la función  $f(t)$  representa el modelo matemático de una *señal* que varía con el tiempo  $t$ , entonces la transformada de Fourier de  $f(t)$ :  $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\phi(\omega)}$ , constituye el *espectro de frecuencias* de  $f(t)$ . Se denomina *espectro de amplitud* de  $f(t)$  a la función  $|F(\omega)|$  y *espectro de fase* de  $f(t)$  a la función  $\phi(\omega)$ .

### Ejercicios. Parte 2: Transformada e Integral de Fourier

1. Demostrar las siguientes propiedades de la transformada de Fourier<sup>1</sup>

**Propiedad (Linealidad).** Si  $F_1(\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\}$  y  $F_2(\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\}$ , y  $a_1$  y  $a_2$  dos constantes arbitrarias, entonces:

$$\mathcal{F}\{a_1 f_1 + a_2 f_2\} = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

**Propiedad (Cambio de escala).** Si  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  y  $a \neq 0$ , entonces:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

**Propiedad.** Si  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ , entonces:

$$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-\omega)$$

**Propiedad (Desplazamiento en el tiempo).** Si  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  y  $a \in \mathbb{R}$ , entonces:

$$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-i\omega a} F(\omega)$$

**Propiedad (Desplazamiento en la frecuencia).** Si  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  y  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ , entonces:

$$\mathcal{F}\{f(t) e^{i\omega_0 t}\} = F(\omega - \omega_0)$$

**Propiedad (Simetría).** Si  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ , entonces:

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = f(-\omega)/(2\pi)$$

**Propiedad (Derivada).** Si  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  y  $f$  derivable y de soporte compacto, entonces:

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega)$$

Este resultado puede generalizarse:  $\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n F(\omega)$ .

**Propiedad (Integral).** Si  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  y  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$ , entonces:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(u) du\right\} = \frac{1}{i\omega} F(\omega)$$

**Propiedad (Convolución).** Si  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  y  $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$ , entonces:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t - u) du\right\} = 2\pi F(\omega)G(\omega)$$

2. Calcular la transformada de Fourier de las siguientes funciones y graficar los espectros de amplitud y fase.

(a)  $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$  . Computar  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  y  $\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$ .

(b)  $f(t) = e^{-a|t|}, a > 0$ . Computar  $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ .

(c)  $f(t) = \begin{cases} A(1 - t/T), & 0 \leq t \leq T \\ A(1 + t/T), & -T \leq t \leq 0 \\ 0, & |t| > T \end{cases}$  .

(d)  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}$

(e)  $f(t) = e^{-t}u(t)$ , donde  $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$  es la *Función de Heaviside*.

<sup>1</sup>En todo momento, se supone que  $f$  admite Transformada de Fourier.

Funciones Generalizadas - Delta de Dirac

**Definición 1.** Una función  $\phi$  se llama de *tendencia rápida a cero* y se la indica  $\phi \xrightarrow{\text{fast}} 0$ , si  $\phi : C^\infty(\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  y cumple:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m \phi^{(n)}(x) = 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Las funciones de tendencia rápida, y todas sus derivadas caen a cero más rápidamente que cualquier potencia de  $x$ , cuando  $|x|$  es muy grande. Es decir, para  $x \rightarrow \pm\infty$ , la gráfica de  $\phi(x)$  se confunde con el eje  $x$  (ver figura 1).

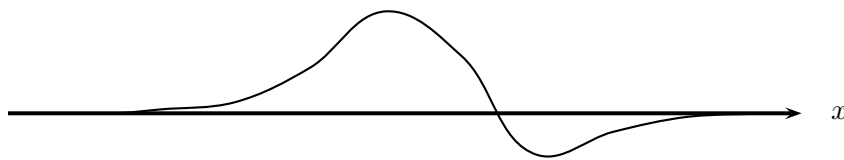


Figure 1: Función de tendencia rápida

**Definición 2.** Llamamos  $\Omega = \{\phi / \phi \xrightarrow{\text{fast}} 0\}$

Hay que notar que  $\Omega$ , con las leyes comunes de la suma y producto por escalares, tiene estructura de espacio vectorial, es decir que si  $\phi, \psi \in \Omega$  y para todo  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{cases} (\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x) \\ (a\phi)(x) = a\phi(x) \end{cases}$$

**Definición 3.** *Función generalizada:* Sea  $f$  una función, llamamos función generalizada a la funcional lineal  $\mathcal{L}_f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , que cumple:

$$\mathcal{L}_f\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x) dx$$

$\mathcal{L}_f\{\phi\}$  es la imagen de  $\phi$  a través de  $\mathcal{L}_f$

**Ejemplo** Sea la función común  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ , entonces la *función seno generalizada*  $\mathcal{L}_{\sin}$  es  $\mathcal{L}_{\sin} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que:

$$\mathcal{L}_{\sin}\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\phi(x) dx$$

, donde  $\phi \in \Omega$ . Resulta obvio que la imagen de  $\phi$ , a través de la función generalizada  $\mathcal{L}_{\sin}$  existe. En efecto:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\phi(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\sin(x)||\phi(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)| dx$$

la cual converge.

Si consideramos ahora que  $f(x)$  es una función diferenciable, es posible asociarle la funcional lineal:

$$\mathcal{L}_{f'}\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x) dx$$

Teniendo en cuenta que tanto  $\phi$  como sus derivadas caen a cero más rápidamente que cualquier potencia de  $x$ , integrando por partes, resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f'}\{\phi\} &= f(x)\phi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x) dx \\ &= -\mathcal{L}_f\{\phi'\} \end{aligned}$$

la cual también es una función generalizada ya que  $\phi' \in \Omega$ .

De esta manera, es posible extender el concepto de derivabilidad. En efecto, como una función generalizada está dada por la acción sobre las funciones  $\phi$  en  $\Omega$ , aún cuando  $f$  no sea diferenciable en el sentido clásico del cálculo diferencial, es posible definir una acción sobre las  $\phi' \in \Omega$ . Así, es posible definir la derivada de una función generalizada de la siguiente manera:

**Definición 4.** *Derivada de una función generalizada.*

Sea la función generalizada  $\mathcal{L}_f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces llamamos derivada primera de la función generalizada  $\mathcal{L}_f$  a la función generalizada:

$$\mathcal{L}_{f'}\{\phi\} = -\mathcal{L}_f\{\phi'\}$$

Nótese que no es necesario que la función  $f$  sea diferenciable, para asociarle una función generalizada que haya que derivar. Si  $f$  es derivable, la derivada de la función generalizada coincide con la derivada clásica en el sentido del cálculo diferencial.

**Ejemplo** Calcular la derivada de  $\mathcal{L}_{\sin}$ .

Habíamos visto que la función generalizada seno es dada por la funcional lineal:

$$\mathcal{L}_{\sin} = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\phi(x) dx$$

entonces, de la definición de derivada de función generalizada, resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\sin'}\{\phi\} &= -\mathcal{L}_{\sin}\{\phi'\} \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\phi'(x) dx \\ &= -\sin(x)\phi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)\phi(x) dx \\ &= \mathcal{L}_{\cos}\{\phi\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada de la función generalizada  $\mathcal{L}_{\sin}\{\phi\}$ , es :  $\mathcal{L}_{\sin'}\{\phi\} = \mathcal{L}_{\cos}\{\phi\}$ .

**Definición 5.** *Delta de Dirac* es la función generalizada que a  $\phi \in \Omega$  le hace corresponder  $\phi(a)$ , para  $a \in \mathbb{R}$ , es decir:

$$\mathcal{L}_{\delta_a}\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\phi(x) dx = \phi(a)$$

De esta forma, la función generalizada Delta de Dirac, hace corresponder a una función  $\phi \in \Omega$ , el valor  $\phi(a)$ , es decir la imagen de  $\phi$  a través de  $\mathcal{L}_{\delta_a}$ . Desde este punto de vista, utilizaremos como notación  $\delta_a(\phi) = \mathcal{L}_{\delta_a}\{\phi\}$ .

Resulta obvio que  $\delta(x)$  no es una función en el sentido usual del análisis matemático, por lo tanto la integral en la que interviene tampoco lo es. De esta forma, la integral y  $\delta(x)$ , están definidas por el número  $\phi(a)$  que le corresponde a la función  $\phi(x)$ .

La teoría de distribuciones, desarrollada por Schwartz y la cual está más allá de estas notas, desarrolla la generalización del concepto de función y extiende la propiedad que define a la Delta de Dirac a funciones continuas, de modo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a)f(x) dx = f(a), \quad \forall f \in C^0 \tag{1}$$

**Ejemplo** La función de Heaviside  $u(x)$ , se define como:

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

La funcional lineal:

$$\mathcal{L}_u\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\phi(x) dx$$

tiene como derivada:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{u'}\{\phi\} &= - \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\phi'(x) dx \\ &= - \int_0^{\infty} \phi'(x) dx \\ &= -\phi(x) \Big|_0^{\infty} \\ &= \phi(0) \end{aligned}$$

Pero, de la definición de la función generalizada Delta de Dirac:  $\mathcal{L}_{\delta_0}\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x) dx = \phi(0)$ , entonces:

$$\mathcal{L}_{u'}\{\phi\} = \delta_0(\phi)$$

En virtud a este resultado, escribiremos, en el sentido de las funciones generalizadas:

$$u'(x) = \delta(x)$$

De esta forma, teniendo en cuenta la definición 2, que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{2}$$

la que constituye la propiedad fundamental de la delta de Dirac.

**Ejemplo** ¿Qué se entiende por  $f(x)\delta(x)$ ?

Resulta obvio que esta expresion carece de sentido desde el punto de Cálculo tradicional, ya que la delta de dirac, solo tiene significado desde el punto de vista de la integral dada por 2. No obstante, aplicando la definición en el sentido de las funciones generalizadas, asumiendo  $f$  continua:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\phi(x) dx = f(0)\phi(0)$$

entonces podemos escribir:

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$$

Observaciones:

- i) En base al resultado en este ejemplo, se interpreta que  $f(x)\delta(x)$ , da como resultado el valor de la función en  $x = 0$ . Resulta entoces una suerte de “muestreo” de la señal modelada por  $f(x)$  en  $x = 0$ .
- ii) Según el resultado expuesto en este ejemplo, resulta que:  $x\delta(x) = 0$ .

**Ejemplo** *Derivada de la Delta*

De la definición de derivada de una función generalizada, es posible computar  $\delta'(x)$ . En efecto:

$$\mathcal{L}_{\delta'}\{\phi\} = -\mathcal{L}_{\delta}\{\phi'\}$$



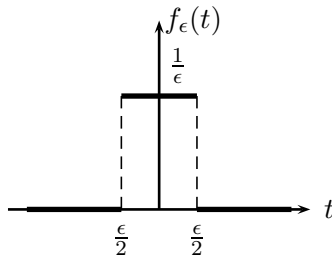
entonces, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\phi(x) dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\phi'(x) dx \\ &= -\phi'(0) \end{aligned}$$

### Interpretación física de $\delta(t)$

Consideremos una señal que se comporte de la siguiente forma: abruptamente se enciende, manteniendo una amplitud constante igual a  $1/\epsilon$ , para luego apagarse abruptamente después de un intervalo de tiempo  $\epsilon$ . Si se considera el origen de tiempo durante la mitad de la vida de la señal, se la puede modelar como un *pulso rectangular* de duración  $\epsilon$  y amplitud 1.

$$f_{\epsilon}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \epsilon/2 \\ 0, & |t| > \epsilon/2 \end{cases}$$



Veamos el comportamiento de  $f_{\epsilon}(t)$ , cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Si  $\phi \in \Omega$ , entonces, nos interesa computar:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}_{f_{\epsilon}}\{\phi\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\epsilon}(t)\phi(t) dt$$

A partir de la definición de  $f_{\epsilon}(t)$ , se tiene que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}_{f_{\epsilon}}\{\phi\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi(t) dt$$

Teniendo en cuenta que  $\phi(t)$  es continua, entonces:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}_{f_{\epsilon}}\{\phi\} = \phi(0)$$

de lo que resulta que el límite de la función generalizada  $f_{\epsilon}(t)$ , da el mismo resultado que la delta de Dirac:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}_{f_{\epsilon}}\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t) dt$$

por lo tanto, vamos a indicar:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_{\epsilon}(t) = \delta(t)$$

Existen otras funciones que son aproximaciones a la delta, por ejemplo:

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\pi}} e^{-t^2/\epsilon}$$

### Ejercicios. Parte 3: Funciones generalizadas-Delta de Dirac

1. Demostrar que  $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \frac{1}{2\pi}$  y  $\mathcal{F}\{\delta(t-a)\} = \frac{1}{2\pi}e^{-i\omega a}$
2. Calcular  $\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\}$ , en el sentido de las funciones generalizadas.

### Aplicación de la Transformada de Fourier a Filtros Lineales

Un *Filtro* o *Sistema* es una correspondencia  $\mathcal{S} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ , siendo  $\mathcal{F}$  un conjunto de funciones. Si  $\mathcal{F}$  es el conjunto de funciones continuas (al menos en casi todas partes), el Filtro se dice que es *analógico*, en cambio si se trata de sucesiones o secuencias, se dice que el Filtro es *digital*.

Consideremos el filtro analógico  $\mathcal{S}$ . La función  $f \in \mathcal{F}$  modela a la señal de entrada al sistema a la que designamos como *input*. Llamemos *output* a la función  $g \in \mathcal{F}$  que modela la respuesta del sistema.



Figure 2: Filtro analógico

La forma explícita de correspondencia entre la entrada  $f$  y la salida  $g$ :

$$g(t) = \mathcal{S}\{f(t)\}$$

de denomina *relación entrada-salida*.

Por lo general,  $\mathcal{S}$  es un operador diferencial, resultando la relación entrada-salida una ecuación integro-diferencial.

Un *Filtro Lineal* es aquel cuyo operador  $\mathcal{S}$  es lineal, es decir que si  $f_1$  y  $f_2$  son dos funciones cuyas respuestas son  $g_1$  y  $g_2$  respectivamente, entonces:

$$\mathcal{S}\{f_1(t) + f_2(t)\} = \mathcal{S}\{f_1(t)\} + \mathcal{S}\{f_2(t)\} = g_1(t) + g_2(t)$$

Un *Filtro invariante en el tiempo*  $\mathcal{S}$  es aquel que cumple:

$$\mathcal{S}\{f(t - t_0)\} = g(t - t_0) \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

Un *Filtro causal*  $\mathcal{S}$  es aquel que si  $f(t) = 0, \forall t \leq t_0$ , entonces  $g(t) = 0, \forall t \leq t_0$ .

#### Ejemplo 1.

Consideremos el circuito RLC serie, excitado por una fuente de tensión alterna  $\mathcal{E}(t)$ .

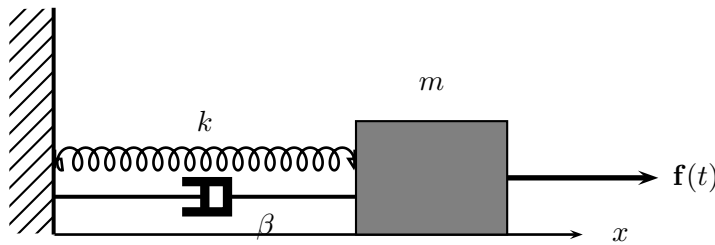
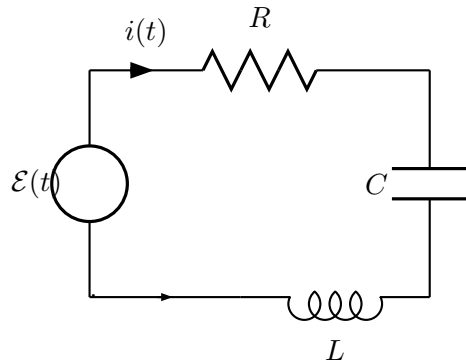
Tomando como respuesta del sistema a la intensidad de corriente eléctrica  $i(t)$  que circula por el conductor, la ecuación diferencial que gobierna la sistema es:

$$L \frac{di}{dt}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi = \mathcal{E}(t)$$

#### Ejemplo 2.

Consideremos el sistema formado por una masa  $m$ , sujeta a un resorte de constante elástica  $k$  y bajo la acción de un amortiguador con coeficiente viscoso  $\beta$ . Aplicando la Segunda Ley de Newton a la partícula, teniendo en cuenta la fuerza elástica, viscosa y una fuerza excitadora  $\mathbf{f} = f(t)\hat{\mathbf{x}}$ , se tiene que la relación entrada-salida es:

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$



donde  $x(t)$  es la coordenada de la masa y es la que se considera como salida del sistema. Se denomina *Función de Green*  $h(t)$  del filtro  $\mathcal{S}$  a la respuesta del filtro ante una excitación Delta de Dirac  $\delta(t)$  considerando condiciones iniciales nulas, es decir:

$$h(t) = \mathcal{S}\{\delta(t)\}$$

Tengamos en cuenta que si la entrada al filtro es continua, entonces puede escribirse:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(t-x) dx$$

entonces la respuesta del filtro  $g(t)$  es:

$$g(t) = \mathcal{S}\{f(t)\} = \mathcal{S}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(t-x) dx\right\}$$

Como el sistema es lineal, entonces:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathcal{S}\{\delta(t-x)\} dx$$

Como estamos considerando filtros invariantes en el tiempo, por definición  $h(t-x) = \mathcal{S}\{\delta(t-x)\}$  es la función de Green del filtro, desplazada en el tiempo  $x$ . Entonces, la respuesta del sistema es:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(t-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)h(x) dx$$

Este resultado nos dice: *la respuesta de un filtro lineal e invariante en el tiempo ante un input  $f(t)$  es la convolución entre la excitación y la función de Green  $h(t)$  del filtro.* La

función de Green de un filtro contiene toda la información dinámica del filtro, es característico de él y depende solo de los parámetros del filtro.

Resta ahora preguntarnos ...

¿Cómo se obtiene la función de Green de un filtro?

Para contestar esta pregunta, apliquemos la Transformada de Fourier a respuesta del filtro lineal e invariante en el tiempo.

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)h(x) dx\right\}$$

LLamando  $\mathcal{F}\{g(t)\} = H(\omega)$ ,  $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$  y  $\mathcal{F}\{g(t)\} = G(\omega)$ , resulta la relación:

$$G(\omega) = F(\omega)H(\omega)$$

A la transformada de Fourier de la función de Green del filtro, se la denomina *función de transferencia*  $H(\omega)$ .

**Ejercicios. Parte 4: Filtros lineales**

1. Demostrar que si a un filtro lineal e invariante en el tiempo se lo excita con una señal senoidal, el filtro reponde con una respuesta senoidal de la misma frecuencia que la entrada.
2. Demostrar que el sistema circuito RLC-serie, considerando la salida como la intensidad de corriente  $i(t)$ , es un filtro lineal e invariante en el tiempo.
3. Mostrar que  $h(t) = -\frac{1}{2k}e^{-|k|t}$  es la función de Green del filtro modelado por:

$$x'' - k^2x = f(t)$$

4. Sea el sistema constituido por un circuito RC-serie. Considerar como input la tensión  $\mathcal{E}(t)$  y output la tensión en el capacitor  $u_C(t)$ . La relación entrada-salida es:

$$\tau \frac{du_C}{dt}(t) + u_C(t) = \mathcal{E}(t)$$

siendo  $\tau = RC$ , la constante de tiempo del sistema.

- (a) Demostrar que este sistema es un filtro lineal e invariante en el tiempo.
  - (b) Obtener la función de transferencia  $H(\omega)$  del filtro. Graficar  $|H(\omega)|$  y la fase  $\phi(\omega)$  versus la frecuencia. Indicar cómo es el comportamiento del filtro con la frecuencia, ante una excitación  $\mathcal{E}(t)$  cualquiera.
  - (c) Demostrar que si  $E(\omega) = \mathcal{F}\{\mathcal{E}(t)\}$ , entonces la Transformada de Fourier de la respuesta del filtro es:  $U_C(\omega) = H(\omega)E(\omega)$ .
5. Un *filtro ideal pasabajos* es aquel sistema lineal cuya función de transferencia es:

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-i\omega T}, & \text{para } |\omega| < \omega_0 \\ 0, & \text{para } |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

siendo  $\omega_0$  la *frecuencia de corte*.

- (a) Hallar la función de Green  $h(t)$  del filtro ideal pasabajo.
- (b) Hallar la respuesta ante una entrada  $f(t) = A \cos 3\omega_0 t + B \sin \frac{\omega_0 t}{2}$

### Transformada Discreta de Fourier

Consideremos una función  $x(t)$ , la cual es muestreada a intervalos regulares en los  $N$  puntos  $t_j = jh$ , con  $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , siendo  $h$  el *intervalo de muestreo*. Indicando a los valores de  $x$  como  $x_j$ , se define la *Transformada Discreta de Fourier* de los valores muestreados  $\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$  a:

$$X_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-\frac{2\pi i}{N}jk} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

siendo la correspondiente fórmula de inversión o *Antitransformada discreta de Fourier*:

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} X_j e^{\frac{2\pi i}{N}jk} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4)$$

Cada valor de la transformada discreta  $X_k$ , está definido en el valor de frecuencia:

$$\omega_k = \frac{k}{2\pi hN} \quad (5)$$

**Definición 6.** *Espectro de Potencia* Si  $X_k$ , con  $k = 0, 1, \dots, N-1$  son los valores de la Transformada Discreta de Fourier de una secuencia  $\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ , entonces se llama *Espectro de Potencia* a:

$$P_k = |X_k|^2 \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

La figura 3 muestra una función en MATLAB que implementa el cómputo de la Transformada Discreta de Fourier.

En muchas aplicaciones, se utiliza la base trigonométrica para “reconstruir” una función  $f(t)$ , a partir de sus muestras en un conjunto de puntos.

**Definición 7.** Se denomina *Polinomio Trigonométrico* de grado  $m$  a:

$$S_m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

Supongamos que se tiene una señal periódica  $f(t)$  de período  $2\pi$  y se conocen  $N+1$  valores de  $f$  a intervalos regulares, en los puntos:

$$t_j = \frac{2\pi}{N+1} \quad j = 0, \dots, N$$

siendo dichos valores:

$$f_j = f(t_j) \quad j = 0, \dots, N$$

Entonces,  $f$  puede ser interpolada en los nodos  $t_j$  mediante el polinomio trigonométrico de grado  $m < N/2$ :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (6)$$

donde los coeficientes se computan:

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f_j \cos jt_j \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (7)$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f_j \sin jt_j \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (8)$$

```

function y = mi_tdf(x)
% Funcion:      y = mi_tdf(x)
% Proposito:   Calcula la transformada discreta
%              de Fourier de la secuencia x
%
% y(n) = (1/N)* Suma{ x(nu) exp(-i 2*pi*n*nu/N) }
%
if nargin~=1
    sprintf('%s', 'Debe ingresar un solo vector/matriz de datos')
    break
end
%
N = length(x);
y = zeros(1,N);
aux = 2i*pi/N;
for n=0:N-1
    s = 0.0;
    for nu=1:N
        s = s + x(nu)*exp(-1*aux*n*(nu-1));
    end
    y(n+1) = s/N;
end
return
    
```

Figure 3: Transformada Discreta de Fourier

El cómputo de los coeficientes de la Transformada Discreta de Fourier 3, conduce a la realización de una cantidad de operaciones (sumas y multiplicaciones complejas)  $\mathcal{O}(N^2)$ . En 1966, Cooley y Turkey desarrollaron un algoritmo eficiente, en cuanto al número de operaciones, para el cómputo de la Transformada Discreta de Fourier. Dicho método de cómputo de llama *Transformada Rápida de Fourier* (Fast Fourier Transform) FFT y requiere  $\mathcal{O}(n \log_2 n)$ , siendo necesario un número de datos  $N = 2^p$ , con  $p \in \mathbb{N}$ . En la figura se muestra un algoritmo recursivo para el cómputo de la FFT.

### Ejercicios. Parte 5: Transformada Discreta de Fourier

- (Lápiz y papel) Sea el vector  $f = [f_0, f_1, \dots, f_{N-1}]$  y  $F = [F_0, F_1, \dots, F_{N-1}]$  su transformada discreta de Fourier. Demostrar, aplicando la definición de transformada discreta de Fourier (TDF) y de la TDF inversa que el antitransformado discreto de  $[F_0, F_1, \dots, F_{N-1}]$ , reconstruye completamente al vector de datos  $f$ .
- (Computadora) Suponga que se desea estudiar el contenido en frecuencias usando la TDF, de la siguiente señal:

$$\begin{aligned}
 x(t) = & 0.0472 \cos(2\pi(200)t + 1.5077) + 0.1362 \cos(2\pi(400)t + 1.8769) + \\
 & + 0.4884 \cos(2\pi(500)t - 0.1852) + 0.2942 \cos(2\pi(1600)t - 1.4488) + \\
 & + 0.1223 \cos(2\pi(1700)t)
 \end{aligned}$$

- Hacer un programa que compute la Transformada Discreta de Fourier.
- Computar la TDF de  $x(t)$  y calcular el espectro de potencia. Determinar la frecuencia fundamental.

```
function X = fft_rec(NN,x)
% funcion fft_rec
% Proposito: Computa la TDF mediante FFT
% Entradas: NN = Tamaño del vector de datos (debe ser 2^p)
%           x = Vector de NN datos
% Salida:   X = Vector con la TDF de x
%
N = length(x);
w = exp(-2*pi*sqrt(-1)/N);
if N == 2
    X = x(1) + w.^[-NN/2:NN-1-NN/2]*x(2);
else
    a1 = x(1:2:N);
    b1 = x(2:2:N);
    a2 = fft_rec(a1,NN);
    b2 = fft_rec(b1,NN);
    for k = -NN/2:NN-1-NN/2
        X(k+1+NN/2) = a2(k+1+NN/2)+b2(k+1+NN/2)*w^k;
    end
end
end
```

Figure 4: Algoritmo FFT recursivo

(c) Represente  $|X(\omega)|$  y la fase de  $\phi(\omega)$  en función de  $\omega$ .

3. (Lpiz y papel) Obtenga el polinomio trigonométrico de grado 3 para la función  $f(t) = 0$ , entre  $-\pi < t \leq 0$  y  $f(t) = 1$ , en  $0 < t \leq \pi$ . Graficar.
4. (Computadora) Para analizar el comportamiento de la TDF con el número de muestras  $N$ , compute polinomio trigonométrico de grado 3 de  $f(t) = t^2$  en  $0 \leq t < 2\pi$ , y  $f(t) = f(t + 2\pi)$ , para:  $N = 8, 16, 32, 64, 128$ . Grafique la función  $f(t)$  y los distintos polinomios.
5. (Computadora) Calcular la TDF de la función  $f$ , usando el cómputo directo y usando el algoritmo FFT. Graficar el espectro de amplitud y de fase. Reconstruir la función  $f(t)$ , mediante el cómputo de la transformada inversa. Ensayar para distintos números de muestras.

(a)

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \\ f(-t), & \forall t \end{cases}$$

(b)

$$f(t) = u(t) - u(t - 1)$$

siendo  $u(t)$  la función de Heaviside.

(c)

$$f(t) = \sin(2\pi f_0 t) + 4 \sin(5\pi f_0 t)$$

con  $f_0 = 60\text{Hz}$ .

(d)

$$f(t) = e^{-|t|}$$

**Ejercicios con computadora.**

**Computadora 1.** El objetivo de este ejercicio es simular la salida de un filtro análogo. Considerar un circuito RC-serie. La ecuación diferencial que lo gobierna es:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = \mathcal{E}(t)$$

si la salida  $u_C(t)$  es la tensión en el capacitor, o:

$$\frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t u_R(\tau) d\tau + u_R = \mathcal{E}(t)$$

si la salida  $u_R(t)$  es la tensión en la resistencia. Considerar para este sistema:  $\tau = RC = 10^{-3}$  s.

1. Implementar el cómputo de la Transformada discreta de Fourier mediante el algoritmo FFT, en C/C++ o FORTRAN. (En GNU Octave ya está implementado mediante la función `fft.m`)
2. Obtener la función de transferencia del filtro, considerando como salidas: a)  $u_C(t)$ , b)  $u_R(t)$ .
3. Obtener la tensión en el capacitor, cuando  $\mathcal{E}(t) = 5(u(t + 0.5) - u(t - 0.5))$ , muestreando para  $N = 128$  datos.
4. Si la señal de entrada es:

$$\mathcal{E}(t) = 120 \cos \frac{2\pi 0.1t}{\tau} + 70 \cos \frac{2\pi 10t}{\tau}$$

obtener la tensión  $u_C(t)$  y  $u_R(t)$ . Comparar ambas salidas con la entrada. Tomar un número de muestras tal que la energía de la entrada no varíe en más del 5%.

**Computadora 2.** Este ejercicio tiene como objetivo analizar espectralmente una imagen y utilizar la transformada discreta de Fourier para realizar *filtrados espaciales*.

La Transformada Discreta de Fourier de una secuencia bidimensional  $x_{n,m}$ , de  $N \times N$  (imagen), es:

$$X_{l,k} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x_{n,m} e^{-\frac{2\pi i}{N}(nl+mk)}$$

siendo la Transformada Inversa Discreta:

$$x_{n,m} = \frac{1}{N^2} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_{l,k} e^{\frac{2\pi i}{N}(nl+mk)}$$

1. Implementar un programa que compute la TDF 2D
2. El archivo `saturno` contiene una matriz de  $400 \times 400$  pixeles<sup>2</sup> y corresponde a niveles de intensidad luminosa comprendidos entre 0 y 255 (todos enteros). Para visualizar esta imagen en escala de grises, es necesario establecer un mapa de color de 255 niveles. Por ejemplo en MATLAB, se puede leer y visualizar así:



```
>> x=load('saturno');
>> colormap(gray(255));
>> image(x');
```

visualizando la figura 2 que muestra una imagen del planeta Saturno, capturada por la misión *Voyager*.

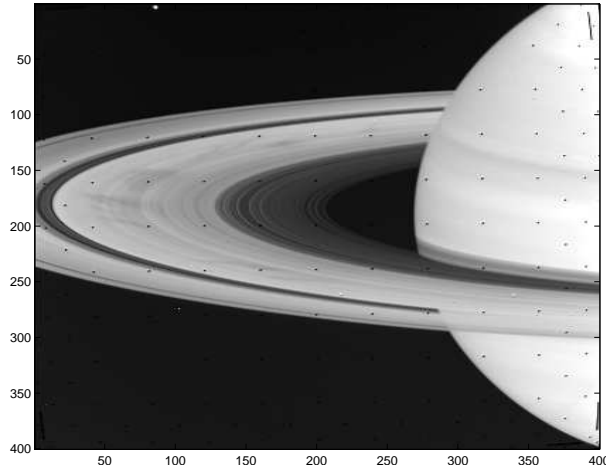


Figure 5: imagen original

Computar la Transformada discreta de Fourier de la imagen original. Armar las imagenes de  $400 \times 400 \text{ pixel}^2$  correspondientes a la amplitud y la fase. Dichas imagenes deben verse como se muestra en la figura 2 (Tener en cuenta de mapear los valores de amplitud y fase al intervalo entero  $[0, 255]$ ).

Computar la Transformada inversa para reconstruir la imagen original de  $400 \times 400 \text{ pixel}^2$ .

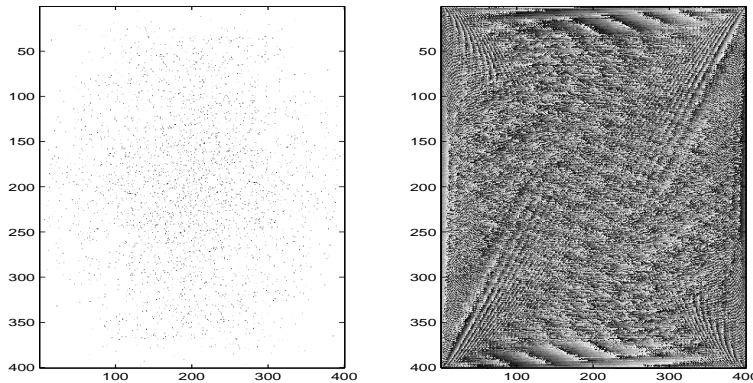


Figure 6: Transformada de Fourier de la imagen original. *Izquierda:* Amplitud, *Derecha:* Fase

3. Considerar el efecto que produce los siguientes filtros  $H_{k,l}$  de  $400 \times 400 \text{ pixel}^2$  en el dominio de las frecuencias (espaciales):

- (a)  $H_{k,l} = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq 400, 190 \leq l \leq 210 \\ 0, & 0 \leq l \leq 400, 190 \leq k \leq 210 \\ 1, & \text{el resto de las posiciones} \end{cases}$
- (b) El filtro gaussiano  $H_{k,l} = \exp(-0.1(k^2 + l^2))$
- (c) El *damero*  $H_{k,l} = \begin{cases} 0, & \text{si } l + k \text{ es par} \\ 1, & \text{si } l + k \text{ es par} \end{cases}$

Reconstruir las imagenes resultantes de estos filtrados.